Exercice 1 (3 points) :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A(0 , -1 , 1) et B(1 , -1 , 0) et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$

1,25 1) Montrer que le centre de (S) est le point $\Omega(1, 0, 2)$ et que son rayon est $R = \sqrt{3}$ et vérifier que le point A appartient à (S)

1,25 2) Déterminer le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et montrer que : $x + y + z = 0$ est une équation du plan (OAB)

0,5 3) Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A

Exercice 2 (3 points) :

1 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 6z + 34 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A , B et C d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = 3 - 5i$ *et* $c = 7 + 3i$. Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et de son image M' par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4 - 2i$

0,75 a) Montrer que : $z' = z + 4 - 2i$, puis vérifier que le point C est l'image de A par T

0,5 b) Vérifier que : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$

0,75 c) En déduire que le triangle ABC est rectangle en C et que : $BC = 2AC$

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient six boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne

1 a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 boules rouges et une boule verte

1 b) Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule verte est égale à $\frac{16}{21}$

1 2) On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne
Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges

Problème (11 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln(x)$

0,5 1) a) Calculer g'(x) pour tout $x \in]0,+\infty[$

0,5 b) Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$

0,5 2) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad g(x) > 0$ (remarquer que : $g(2) > 0$

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - (\ln(x))^2$

Et on désigne par (C_f) la courbe représentant f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm

0,75 1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

0,5 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ (on pourra poser $= \sqrt{x}$. Rappel : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$)

0,75 b) En déduire que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(remarquer que : $f(x) = x\left(1 - \frac{(\ln(x))^2}{x}\right)$

0,5 c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ et en déduire que (C_f) admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$

0,25 d) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (Δ)

0,75 3) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et que f strictement croissante sur $]0,+\infty[$

0,25 b) Dresser le tableau de variations de f

0,5 c) Montrer que : $y = x$ est une équation de tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

0,5 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que :

$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln(2))^2 < \frac{1}{2}$

1 5) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (C_f) et la droite (Δ) (on admet que I(e , e , -1) et un point d'inflexion pour (C_f) et on donne $e \approx 2{,}7$)

0,5 6) a) Montrer que : $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ et montrer que : $\int_1^e \ln(x)\, dx = 1$

0,75 b) En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^e (\ln(x))^2\, dx = e - 2$

0,5 c) Calculer l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations : $x = 1 \quad et \quad x = e$

III. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = f(u_n)$

0,75 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad 1 \leq u_n \leq 2$ (on pourra utiliser le résultat de la question II)3)a))

0,5 2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0,75 3) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite